Шифр: А-31

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап

2018/2019
Ленинградская область

Район Всеволожский

Школа МОУ „Лицей №1" г. Всеволожска

Класс 9

ФИО Смородский Артём Сергеевич

Чистовик А-31

№1.

1	2	3	4	5	Σ
7	3	X	X	X	10

$f(x)=x^2+bx+c$

$g(x)=x^2+dx+e$

$f(1)=1^2+b\cdot1+c=b+c+1$

$g(1)=1^2+d\cdot1+e=d+e+1$

$f(2)=2^2+2b+c=2b+c+4$

$g(2)=2^2+2d+e=2d+e+4$

$f(1)=g(2)$:

$b+c+1=2d+e+4$

$g(1)=f(2)$:

$d+e+1=2b+c+4$

~~4.~~ По теореме Виета в 1 трёхчлене $-b$: сумма корней, а сумма корней II-го трёхчлена: $-d$. Чтоб найти сумму корней ~~всех~~ общую, нужно найти $-b+(-d)=-b-d$

Решение:

$$\begin{cases} b+c+1=2d+e+4 \\ d+e+1=2b+c+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b+d+c+e+2=2d+2b+e+c+8 \\ d+e+1=2b+c+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b-d=6 \\ d+e+1=2b+c+4 \end{cases}$$

Ответ: 6.

№2. A-31

Рассмотрим все возможные правдивые высказывания каждого рыцаря:

1: <3; <4; <5; <6; <7; <8; <9; <10 (<2 не может быть, т.к. он загадал целое число >1)
аналогично для всех остальных:

2: <4; <5; <6; <7; <8; <9; <10;

3: <5; <6; <7; <8; <9; <10;

4: <6; <7; <8; <9; <10;

5: <7; <8; <9; <10;

6: <8; <9; <10;

7: <9; <10;

8: <10;

9: ничего правдивого сказать не мог, т.к. он загадал число >9
10: аналогично рассуждается 9
Отсюда мы видим, что 9-ый и 10-ый человек не может быть рыцарем.
Значит рыцарей не более 8. Приведу пример для 8 рыцарей:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
число ↓ 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Затем после того как все сказали больше ...,
I сказал: „моё число <3"
II сказал: „моё число <4"
...
VIII сказал: „моё число <10"
а ~~кто-то~~ IX сказал: „моё число <1"
X сказал: „моё число <2".
Ответ: 8 рыцарей.

А-31 №6.

6	7	8	9	10	Σ
7	~~0~~ 7	×	×	×	~~7~~ 14

Пусть 4 последовательных натуральных числа >100 можно представить в следующем виде:
$x ; x+1 ; x+2 ; x+3$.

Возьмём ~~3 первых~~ 3 последовательных натуральных числа: ~~$x ; x+1 ; x+2$~~. Рассмотрим их сумму и посмотрим, на какие числа они делятся: может делиться на 3 и на 2

1) Их сумма делится на 3. Доказательство:
$x+(x+1)+(x+2) = 3x+3$. $3x \vdots 3$; $3 \vdots 3$, значит $3x+3 \vdots 3$. Значит сумма 3 послед. ч. $\vdots 3$

2) ~~Их~~ какая-то ~~тоже~~ сумма 3 послед. чисел из 4 делится на 2. Доказательство:

а) Пусть x чётное число.
Тогда рассмотрим числа $x+1 ; x+2 ; x+3$. Их сумма тоже делится на 3 ($3x+6 \vdots 3$) (по пункту). Тогда $x+1$ нечётное, $x+2$ чётное, $x+3$ нечётное, а сумма 2 нечёт. чисел чётное число, значит
$\underbrace{(x+1+x+3)}_{\text{чёт. число}} + \underbrace{(x+2)}_{\text{чёт. число}} =$ чёт. число., значит $\vdots 2$.

б) Пусть x нечётное число, тогда рассмотрим числа $x ; x+1 ; x+2$: x нечётное, $x+1$ чётное, $x+2$ нечётное, а по пункту а их сумма тоже будет чётным числом, значит в данном случае их сумма будет $\vdots$ на 2.

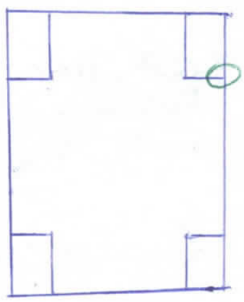
Значит либо ~~$x ; x$~~ сумма $x ; x+1 ; x+2$ $\vdots 2$ и $\vdots 3$, либо сумма $x+1 ; x+2 ; x+3$ $\vdots 2$ и $\vdots 3$. ~~Но 2 и 3 взаимно простые числа,~~
если ~~число~~ сумму представить в ~~в~~ виде произв. $2 \cdot k$, где $2k \vdots 3$, то т.к. 2 и 3 взаим. и $k \vdots 3$,
значит ~~их~~ сумму можно представить в виде произведения $2 \cdot 3 z$, где
где $z \neq 2 ; 3$ и >1, т.к. $x > 100$, а максим. число $z = 2 ; 3 = 12 ; 18$

№7.

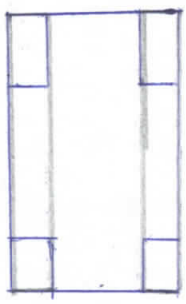
А-31

1) Возьмём прямоугольник:

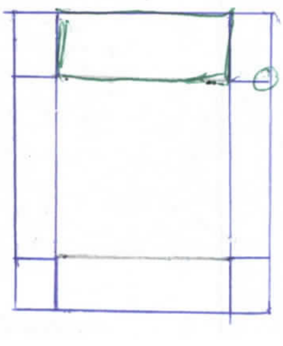
2) Наложим на углы этого прямоугольника 4 одинаковых прямоугольника:



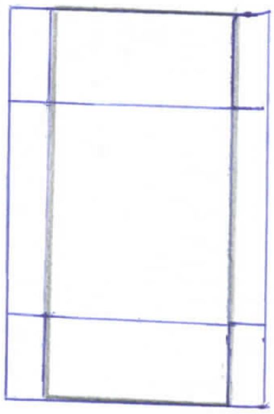
3) Наложим на левую и правую сторону большого прямоугольника два прямоугольника (1 на правой стороне, другой на левой стороне) они полностью должны лечь на маленькие прямоугольники, чтобы ~~их длина~~ они имели с ними (каждый прямоугольник имеет 4 общие вершины с двумя пр-ками на своей стороне).



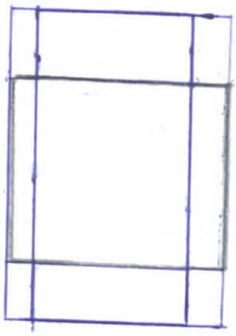
4) наложим два прямоугольника (1 на верхнюю сторону, другой на нижнюю, но так, чтобы они не налегали на остальные прямоугольники и имели с другими прямоугольниками по 4 общих вершины (каждой:



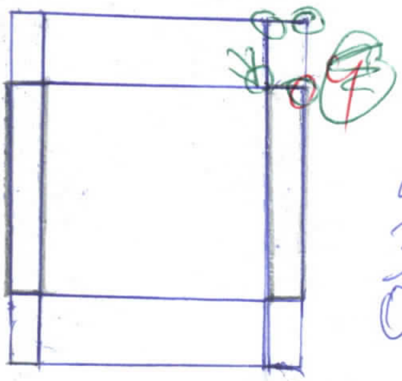
5) Наложим больший прямоугольник, стороны которого прилегают к верхней и нижней стороне, но не закрывают два боковых пря-ка



6) Наложим также больший прямоугольник, который прилегает к боковым сторонам, но не налегает на самые первые прямоугольники:



7) Накладываем два прямоугольника, прилегающих к боковым сторонам, не налегающих на самые первые прямоугольники, будут иметь по 4 общие вершины с другими каждый прям-к:



Здесь мы можем увидеть, что все вершины являются вершинами ровно 3 прямоугольников каждая.
Ответ: можно.